www.matheabi-bw.de

Abitur BW 2004, Wahlteil Aufgabe II 2.1

Gegeben sind die Punkte $A(10|0|0)$ und $B(0|10|0)$ sowie für jedes $a>0$ eine Ebene E_a: $a\cdot x_1 - x_3 = 0$.

a) Beschreiben Sie die Lage der Ebene E_3.
Die zu E_a senkrechte Gerade durch A schneidet E_a im Punkt D_a.
Bestimmen Sie seine Koordinaten.
$\left(\text{Teilergebnis: } D_a\left(\frac{10}{1+a^2}\middle|0\middle|\frac{10a}{1+a^2}\right)\right)$

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD_a für jedes $a>0$ rechtwinklig ist.

Lösung Teil a:

Überlegen Sie, was es für die Lage einer Ebene bedeutet, wenn eine Variable in der Gleichung nicht vorkommt.

Lage der Ebene E_3:
Da in der Gleichung die Variable x_2 nicht vorkommt, ist E_3 parallel zur x_2-Achse.
Die Koordinaten des Ursprungs erfüllen die Ebenengleichung.
Folglich liegt die x_2-Achse in der Ebene E_3.

Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die senkrecht zu E_a ist und durch A geht. Schneiden Sie diese Gerade mit E_a.

Bestimmung von D_a:

Die Hilfsgerade g_a hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor.

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R},\ a>0$$

Schnitt von g_a mit E_a:

$$a\cdot(10 + r\cdot a) - (-r) = 0; \quad r = \frac{-10a}{1+a^2}$$

r eingesetzt in g_a ergibt $D_a\left(\frac{10}{1+a^2}\middle|0\middle|\frac{10a}{1+a^2}\right)$.

Lösung Teil b:

B liegt in jeder Ebene E_a. Was bedeutet das für die Behauptung?

Die Koordinaten von B erfüllen für jedes a die Ebenengleichung.
Da die Gerade (AD_a) orthogonal zu E_a ist,
ist sie auch orthogonal zu D_aB.
Das Dreieck ABD_a ist rechtwinklig.