Www.matheabi-bw.de

Abitur BW 2005, Wahlteil Aufgabe II 1

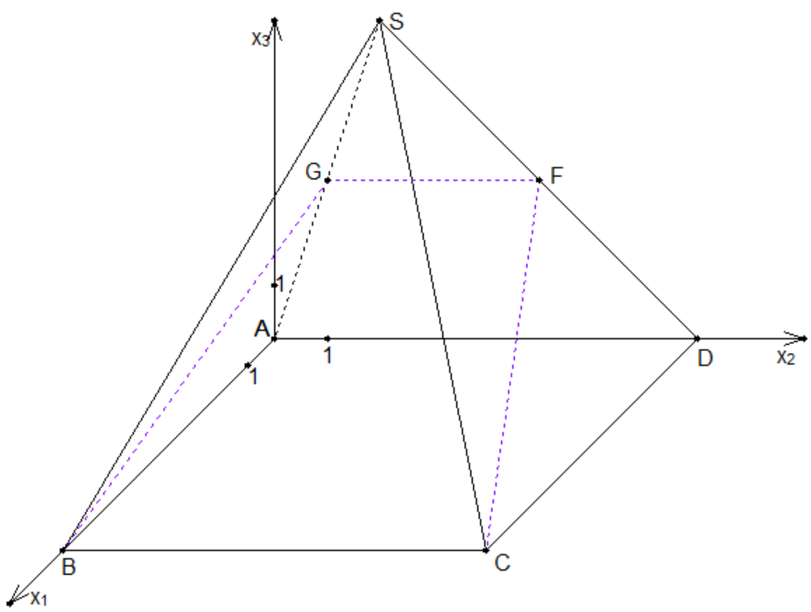
Gegeben sind eine Pyramide ABCDS mit den Punkten
$A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, $D(0|8|0)$ und $S(4|4|8)$
sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_r: $rx_1 + 3x_3 = 8r$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante BC und schneidet die Kante DS in F und die Kante AS in G.
Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und G an.
Zeichnen Sie das Viereck BCFG ein.
Zeigen Sie, dass dieses Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.
Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?

b) Bestimmen Sie r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat.
Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat.

c) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt.
Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur.
Welche Schnittfiguren sind möglich?
Geben Sie die jeweiligen Werte von r an.

Lösung Teil a:



Koordinaten von F und G:

Ebenengleichung: E_2: $2x_1+3x_3=16$

Pyramidenkante (DS): $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\8\end{pmatrix}$; $r\in\mathbb{R}$

Schnitt von E_2 und (DS): $2\cdot(4r)+3\cdot(8r)=16$; $r=0{,}5$

Somit gilt: $F(2|6|4)$ und aus Symmetriegründen $G(2|2|4)$.

Ein Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez, wenn zwei gegenüberliegende Seiten parallel und die beiden anderen Seiten gleich lang sind.

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GF}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$; Die Seiten BC und GF sind parallel.

$\overrightarrow{BG}=\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}$; $|BG|=\sqrt{6^2+2^2+4^2}=\sqrt{56}$; $\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}-6\\-2\\4\end{pmatrix}$; $|CF|=\sqrt{6^2+2^2+4^2}=\sqrt{56}$

Das Viereck BCFG ist ein gleichschenkliges Trapez.

Die Innenwinkel des gleichschenkligen Trapezes sind paarweise gleich groß.

$$\cos(\alpha)=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BG}|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}\right|}=\frac{16}{\sqrt{64}\cdot\sqrt{56}}=\frac{1}{\sqrt{14}};\quad \alpha\approx 74{,}5°;\ 180°-\alpha\approx 105{,}5°$$

Die Winkel im Trapez bei F und G sind 74,5° groß, bei B und C 105,5°.

Lösung Teil b:

Zur Bestimmung von r^* verwenden Sie die Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung.

Die Ebene E_r hat die **Hesse'sche Normalenform** $\frac{rx_1+3x_3-8r}{\sqrt{r^2+9}}=0$.

$$d(S;E_r)=\left|\frac{4r+3\cdot 8-8r}{\sqrt{r^2+9}}\right|=\left|\frac{24-4r}{\sqrt{r^2+9}}\right|$$

Bedingung: $d(S;E_r)=4$ bzw. $\left|\frac{24-4r}{\sqrt{r^2+9}}\right|=4$; $r=2{,}25$

Für $r=2{,}25$ hat S von E_r den Abstand 4.

Der gesuchte Punkt ist der Durchstoßpunkt des Lotes von S auf die Ebene $E_{2,25}$ durch diese Ebene.

Ebenengleichung $E_{2,25}: 2{,}25\,x_1 + 3x_3 = 18$ bzw. $3x_1 + 4x_3 = 24$

Lotgerade l von S auf $E_{2,25}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

Lotfußpunkt: $3 \cdot (4 + 3t) + 4 \cdot (8 + 4t) = 24;\ 25t = -20;\ t = -\frac{4}{5}$

Der gesuchte Punkt ist L(1,6|4|4,8).

Lösung Teil c:

Überprüfen Sie, dass B und C in jeder Ebene E_r liegen.

Die Koordinaten der Punkte B und C erfüllen die Gleichungen aller Ebenen E_r.
Wenn zwei Punkte in einer Ebene liegen, dann liegt auch ihre Verbindungsgerade in ihr.

Mögliche Schnittfiguren:

(1) Für $r = 0$ ergibt sich E_0: $x_3 = 0$, die x_1x_2-Ebene.
Die Schnittfigur ist ein **Quadrat.**

(2) Die Spitze S liegt in E_6. Die Seitenfläche BCS liegt in E_6.
Die Schnittfigur ist ein **gleichschenkliges Dreieck**.

(3) Für $0 < r < 6$ liegt die Ebene zwischen E_0 und E_6.
Die Schnittfigur ist ein **gleichschenkliges Trapez**.

(4) Für $r \leq$ oder $r > 6$ Haben Pyramide und Ebene nur die **Strecke** BC gemeinsam.